

Kontrolltheorie und Optimale Steuerung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 1 - Abgabe: 26.10.2010

Webseite zur Vorlesung: <http://www.lebiedz.de> → Lehre

Allgemeine Bemerkungen:

Für den Erhalt eines Übungsschein müssen *jeweils* 50 % der Punkte für Theorie- und Programmieraufgaben erreicht werden. Bei Bedarf wird ein benoteter Schein nach der in den Übungen erreichten Punktzahl vergeben. Wurde eine Aufgabe eines Übungsblatts erfolgreich bearbeitet und abgegeben, muss der Kandidat in der Lage sein, die Aufgabe in der Übungsstunde vorzurechnen.

Die Aufgaben basieren auf dem ersten Kapitel der Vorlesung. Eine tiefergehende Behandlung des Pendelbeispiels findet sich in dem Buch *Mathematical Control Theory*, verfügbar unter http://www.math.rutgers.edu/~sonntag/FTP_DIR/sonntag_mathematical_control_theory_springer98.pdf.

Aufgabe 1. Proportionale Steuerung für den nichtlinearen Fall

Im ersten Kapitel des Vorlesungsskripts wird gezeigt, dass proportionales Feedback im Allgemeinen nicht ausreichend ist, um das linearisierte Pendel wie gewünscht zu stabilisieren. Tatsächlich gilt dies auch für den nichtlinearen Fall

$$\ddot{\phi} - \sin \phi + \alpha \phi = 0. \quad (1)$$

Dazu betrachten wir die Energiefunktion

$$V(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = \cos \phi - 1 + \frac{1}{2}(\alpha \phi^2 + \dot{\phi}^2),$$

die man erhält, wenn man (1) mit $\dot{\phi}$ multipliziert und nach t integriert (Energimethode). Zum physikalischen Hintergrund: http://de.wikipedia.org/wiki/Energieerhaltungssatz#Energieerhaltungssatz_in_der_Newtonschen_Mechanik.

Zeige zunächst, dass $V(\phi(t), \dot{\phi}(t))$ entlang der Lösung von (1) konstant ist. Man folgere dann, dass es Anfangswerte gibt mit $\phi(0) = \epsilon$, $\dot{\phi}(0) = 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig, für die nicht gilt, dass $\phi \rightarrow 0$ und $\dot{\phi}(t) \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2. Steuerung vs. Regelung

Im Gegensatz zu den vorgestellten Feedbackregelungen gibt es auch die Möglichkeit basierend auf den Anfangswerten eine Steuerfunktion (closed loop) zu berechnen und diese anzuwenden ohne auf aktuelle Messwerte zurückzugreifen. Angenommen es gilt $\phi(0) = 1$ und $\dot{\phi}(0) = -2$ und wir wollen die Lösung im Nullpunkt stabilisieren. Versuch und Irrtum zeigt, dass mit

$$u(t) = 3e^{-2t}$$

eine Regelfunktion gegeben ist, für die die Lösung

$$\phi(t) = e^{-2t}$$

ist. Offenbar gilt $\phi \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Angenommen die Anfangsgeschwindigkeit weicht nur ein wenig vom angenommenen Wert ab, also

$$\phi(0) = 1, \quad \dot{\phi}(0) = -2 + \epsilon, \quad \text{mit } \epsilon > 0.$$

Zeige das gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty.$$

Analog für $\epsilon < 0$ zeige, dass die Lösung gegen $-\infty$ geht.