

**Theorie-Übungen 2 zur
Mathematik für Bioinformatik und Systembiologie
– Optimierungsmethoden –
(WS 2011/12)**

Aufgabe 2.1 (Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$)

Häufig ist es in der Praxis nicht möglich, Optimierungsprobleme analytisch zu lösen. Deshalb werden verschiedene numerische Verfahren (wie z. B. das Newton-Verfahren) dafür verwendet. Ein Beispiel hierfür ist das mehrdimensionale Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Wie Sie wissen, muss in einem Optimalpunkt x^* die notwendige Bedingung $\nabla f(x^*) = 0$ erfüllt sein.

- i) Entwickeln Sie allgemein ein Newton-Verfahren für eine beliebige Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und formulieren Sie das Newton-Verfahren speziell für $F := \nabla f(x)$.
- ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens bis zu einer Genauigkeit von 10^{-2} die Lösung des Optimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$, $x = (x_1, x_2)^T$ mit Startpunkt $x^0 = (2, 3)^T$. Fällt Ihnen etwas auf?
- iii) Gehen wir zurück zum Fall $F(x) = 0$. Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie zunächst die Nullstellenmengen der Komponentenfunktionen von F . Wo erwarten Sie deshalb *eine* Lösung von $F(x^*) = 0$? Lösen Sie das Problem numerisch mit dem Newton-Verfahren zum Startwert $x^0 = (2, 2)^T$ in vier Iterationen. Welche Konvergenzordnung beobachten Sie? (Falls Sie diese noch nicht erkennen, dürfen Sie gerne mehr Iterationen ausführen.)

Tip: Vereinfachen Sie für die Berechnungen die Iterationsvorschrift immer so weit wie möglich.

4 Punkte